(Classes de Terminale C et E) DURÉE : 5 heures

La calculatrice électronique de poche est autorisée.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les cinq exercices sont indépendants.

EXERCICE I

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout nombre entier naturel n :

$$x_0^3 + x_1^3 + \ldots + x_n^3 = (x_0 + x_1 + \ldots + x_n)^2 .$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que :

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = \frac{m(m+1)}{2}.$$

2. Si n et p sont deux nombres entiers naturels non nuls, on pose :

$$S_{n,p} = 1^p + 2^p + \ldots + n^p .$$

Déterminer les entiers naturels non nuls p tels que, quel que soit l'entier naturel non nul n, $S_{n,p}$ soit le carré d'un nombre entier naturel.

EXERCICE II

À tout nombre entier naturel non nul n, on associe l'application f_n de la variable réelle x, définie pour $x \geqslant n$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{x-n} + \sqrt{x-n+1} + \ldots + \sqrt{x-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \ldots + \sqrt{x+n} - (2n+1)\sqrt{x}.$$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.

Montrer que f_n est croissante et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

2. Déterminer la limite de la suite de terme général $f_n(n)$.

EXERCICE III

Soit S un point fixe d'une sphère fixe (Σ) de centre Ω. On considère les tétraèdres SABC inscrits dans la sphère (Σ) et dont les arêtes issues de S sont deux à deux orthogonales.

1. Montrer que les plans (ABC) passent par un point fixe.

2. Pour un tel tétraèdre SABC, le point S et le centre Ω de la sphère (Σ) se projettent orthogonalement sur le plan (ABC) respectivement en H et O. On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Démontrer que : $R^2 = OH^2 + 2SH^2$.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE IV

Soit p un nombre entier naturel et $n = 2^p$.

On considère les parties A de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots n\}$ possédant la propriété suivante :

si x appartient à A, alors $2x$ n'appartient pas à A.

Déterminer le nombre maximal d'éléments d'une telle partie A.

EXERCICE V

1. On considère l'application P de C dans C définie par : $P(z) = z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z$

où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont quatre nombres complexes donnés.

On pose $w_\ell = e^{\frac{2i\ell\pi}{5}}$, où ℓ désigne un nombre entier compris entre 0 et 4.

Montrer que $P(w_0) + P(w_1) + P(w_2) + P(w_3) + P(w_4) = 5$.

2. Soient A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, cinq points du plan. On construit un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre A_1 et de rayon donné R.

Démontrer qu'il existe un sommet S du pentagone tel que :

$$SA_1 \cdot SA_2 \cdot SA_3 \cdot SA_4 \cdot SA_5 \geqslant R^5.$$

FIN